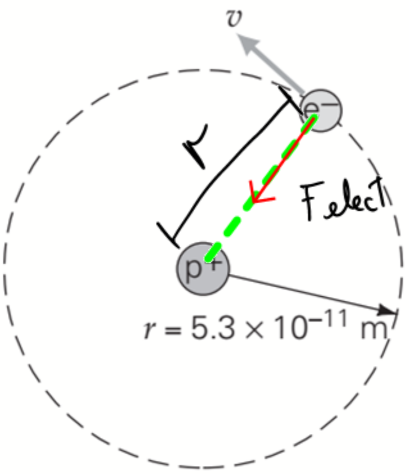
36. ●● Calcule la fuerza gravitacional y eléctrica entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno (▼figura 15.24), suponiendo que están a una distancia de 5.3×10^{-11} m. Luego calcule la razón entre la magnitudes de la fuerza eléctrica y la de la fuerza gravitacional.



◀ **FIGURA 15.24 Átomo de hidrógeno** Véanse los ejercicios 36 y 37.

$$\begin{cases} \text{protón}: +e \\ \text{electrón} = -e \end{cases}$$

$$F_{elect} = \frac{K(e)(e)}{r^2}$$

$$e = 1,602 \times 10^{-19}\,C$$

$$K = 9 \times 10^{9}\,\frac{N.m^2}{C^2}$$

$$r = 5.3 \times 10^{-11}\,m$$

$$\boxed{F_{elect} = 8,22 \times 10^{-8}\,N}$$

TABLA 15.1 Partículas subatómicas y sus cargas eléctricas

Partícula	*Carga eléctrica**	*Masa**
Electrón	-1.602×10^{-19} C	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg
Protón	$+1.602 \times 10^{-19}$ C	$m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg
Neutrón	0	$m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ kg

*Aunque los valores están dados con cuatro cifras significativas, usaremos sólo dos o tres cifras en nuestros cálculos.

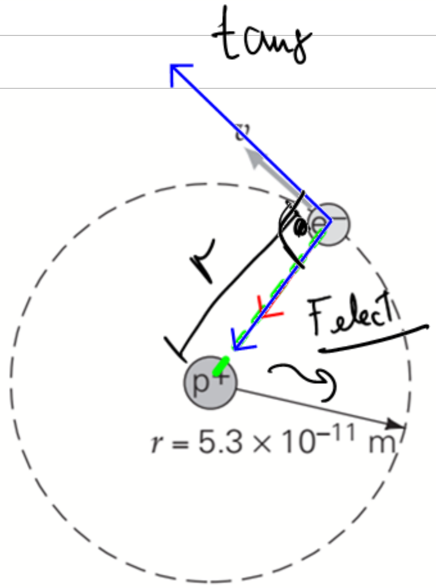
$$F_{grav} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{N.m^2}{kg^2}$$

$$\boxed{F_{grav} = 3.62 \times 10^{-47}\,N}$$

$$\boxed{\frac{F_{elect}}{F_{grav}} \sim 10^{39}}$$

37. ●●● En promedio, el electrón y el protón en un átomo de hidrógeno están separados por una distancia de 5.3×10^{-11} m (figura 15.24). Suponiendo que la órbita del electrón es circular, *a*) ¿cuál es la fuerza eléctrica sobre el electrón? *b*) ¿Cuál es la rapidez orbital del electrón? *c*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración centrípeta del electrón en unidades de *g*?



radial
normal
centripeto

Dinámica Circular

- Eje radial

- $\boxed{\sum \bar{F}_{rad} = m\bar{a}_{ctp}}$

$F_{ctp} = m a_{ctp}$

- $\boxed{\bar{R}_{ctp} = m\bar{a}_{ctp}}$

$F_{elect} = m\, a_{ctp}$

$$\boxed{a_{ctp} = \frac{F_{elect}}{m}} = \frac{8.22 \times 10^{-8}\,N}{9.11 \times 10^{-31}\,kg} = \boxed{9.02 \times 10^{22}\, m/s^2}$$

$$\frac{a_{ctp}}{g} = \frac{9.02 \times 10^{22}\, m/s^2}{9.81\, m/s^2} = 9.20 \times 10^{21}$$

$$\boxed{a_{ctp} = 9.20 \times 10^{21}\, g}$$

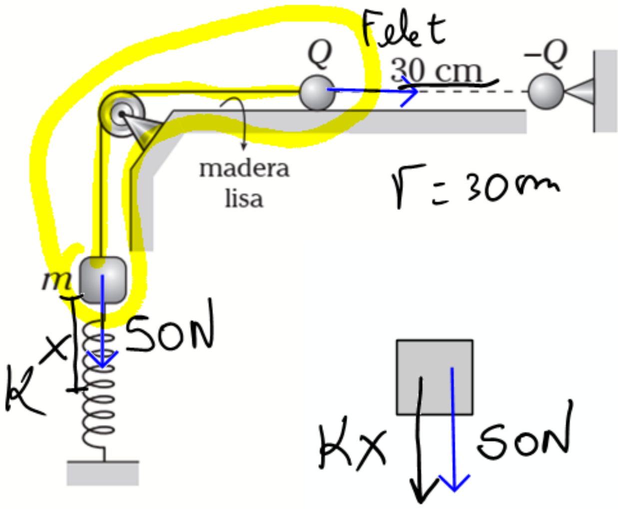
Cinemática Circular :

$$\boxed{a_{ctp} = \frac{v^2}{r}}$$

$$v = (r\, a_{ctp})^{1/2}$$

$$v = (5.3 \times 10^{-11} \times 9.022 \times 10^{22})^{1/2} \approx \boxed{2.2 \times 10^{6}\, m/s}$$

1. El sistema que se muestra está en reposo. Determine la deformación del resorte de rigidez 1000 N/m. (Considere $m=5$ kg, $g=10$ m/s^2 y $|Q|=25\ \mu$C)

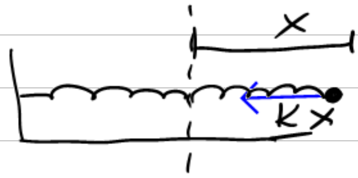


$$F_{elect} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_{elect} = \frac{9\times10^9 \times (25\times10^{-6})^2}{(0.3)^2}$$

$$F_{elect} = 62.5\,N$$

x : estiramiento del resorte



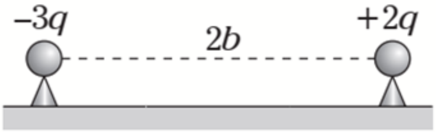
$$F_{elect} = Kx + 50$$

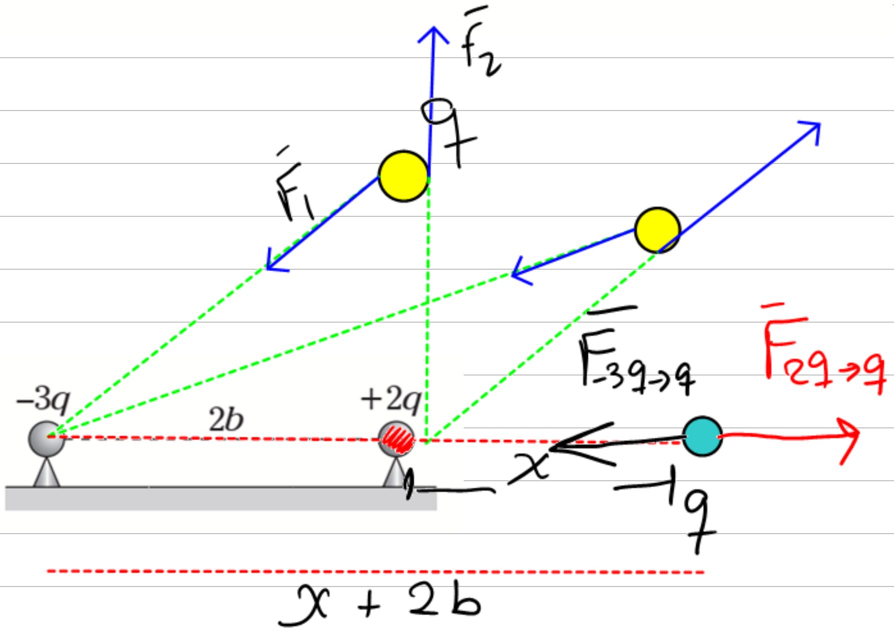
$$62.5 = 1000x + 50 \Rightarrow 12.5 = 1000x$$

$$x = 0.0125\,m = 1.25\,cm$$

2. En el gráfico, ¿a qué distancia de la partícula $+2q$ se debe colocar una partícula electrizada, de tal manera que quede en reposo? (Desprecie efectos gravitatorios)

Reposo → $a = 0$ (Equilibrio)
→ $v = 0$





Equilibrio

$$\boxed{\bar{F}_{-3q\to q} + \bar{F}_{2q\to q} = 0}$$

$$\boxed{\vec{F}_{-3q\to q} = -\vec{F}_{2q\to q}}$$

$$\frac{\cancel{K}(3\cancel{q})(\cancel{q})}{(x+2b)^2} = \frac{\cancel{K}(2\cancel{q})\cancel{q}}{x^2}$$

$$3x^2 = 2(x+2b)^2$$

$$3x^2 = 2(x^2 + 4xb + 4b^2)$$

$$\boxed{x^2 - 8bx - 8b^2 = 0}$$

$a = 1$
$b = -8b$
$c = -8b^2$

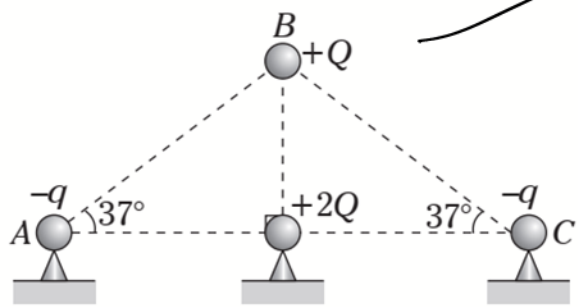
$$x_{1,2} = \frac{8b \pm \sqrt{(8b)^2 - 4(-8b^2)(1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8b \pm 4\sqrt{6}b}{2} = b(4 \pm 2\sqrt{6})$$

$x_1 = b(4 + 2\sqrt{6}) = \boxed{8.89b}$ ✓✓

$x_2 = b(4 - 2\sqrt{6}) = \boxed{-0.89b}$ ✗ No tiene sentido físico

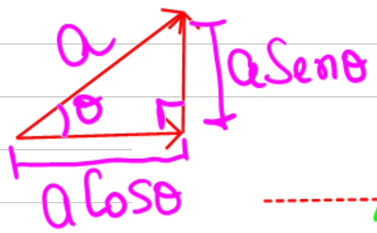
3. El sistema de pequeñas esferas electrizadas está en equilibrio. Despreciando la masa de $+Q$, determine la relación $\frac{|Q|}{|q|}$.

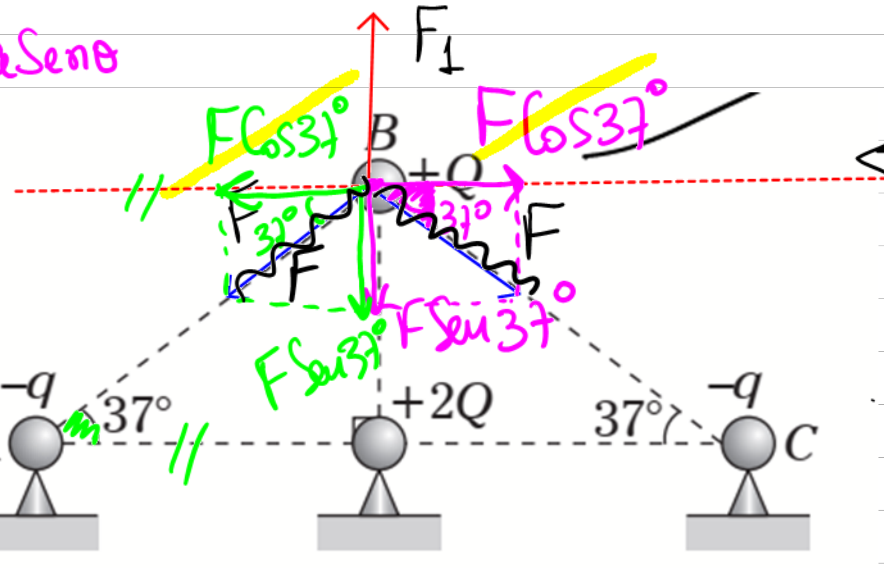


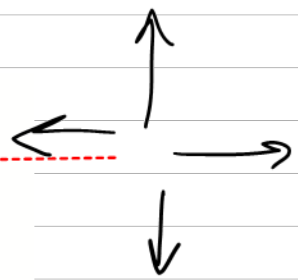
Equilibrio

$$\sum \bar{F} = 0$$

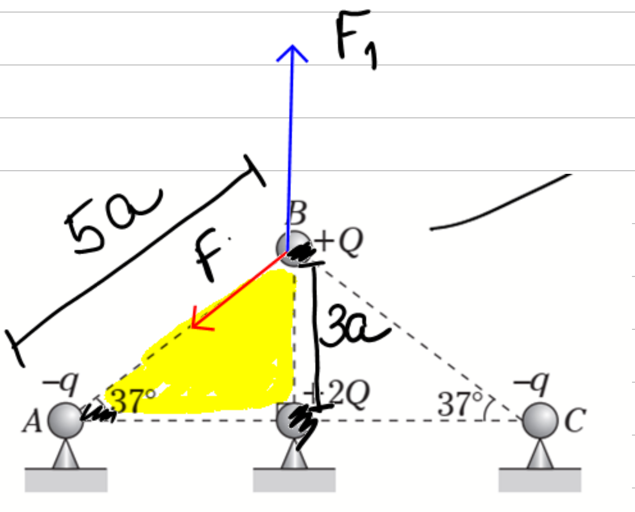
$$\boxed{\begin{gathered}\sum F_{arriba} = \sum F_{abajo} \\ \sum F_{derecha} = \sum F_{izquierda}\end{gathered}}$$







$$\boxed{F_1 = 2F\,Sen37^\circ}$$



$$F = K\frac{(q)(Q)}{(5a)^2}$$

$$F_1 = K\frac{(Q)(2Q)}{(3a)^2}$$

$$\frac{\cancel{K}\,\cancel{Q}(2Q)}{(3a)^2} = 2\,\frac{\cancel{K}(q)\cancel{Q}}{(5a)^2} \times \frac{3}{5}$$

$$\frac{\cancel{2}^{1}Q}{9\cancel{a^2}} = \frac{\cancel{6}^{3}q}{25\cancel{a^2}} \times \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\frac{Q}{q} = \frac{27}{125}}$$

P2. Carga oscilante.

Considera dos pequeñas esferas sujetas en los extremos de una varilla no conductora de longitud $2d$ (Figura 1). Una tercera esfera C tiene masa m y puede deslizar sin rozamiento en la varilla. Las tres esferas son no conductoras y cada una tiene una carga eléctrica q distribuida sobre su superficie. Se separa la esfera C una distancia x de la posición de equilibrio O.

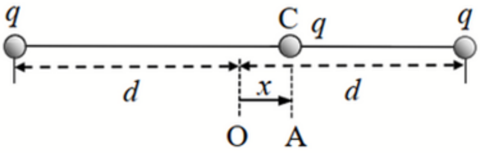
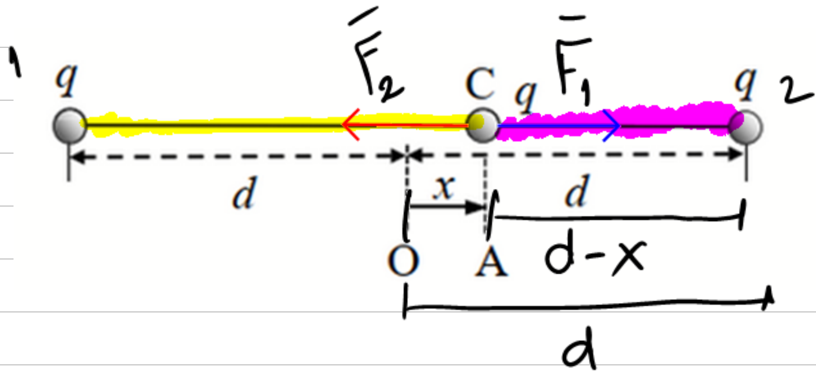


Fig. 1

a) Halla la expresión de la fuerza que actúa sobre la esfera C cuando se encuentra a distancia x de la posición de equilibrio.



$$F_1 = K\frac{q^2}{(d+x)^2}$$

$$F_2 > F_1$$

$$F_2 = K\frac{q^2}{(d-x)^2}$$

$$\sum F = F_2 - F_1 = \frac{Kq^2}{(d-x)^2} - \frac{Kq^2}{(d+x)^2}$$

$$\boxed{\sum F = kq^2\left\{\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right\}}$$

b) ¿Cuál es la expresión de la fuerza sobre la esfera C si se considera que $x << d$?

x

d

$x << d$

$1 \quad 10$

$0{,}1 \quad 10$

$0{,}01 \quad 10$

$1 << 1000$

$$\sum F = kq^2\left\{\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right\}$$

Aproximación de Newton: $\boxed{x \ll 1 \Rightarrow (1+x)^n \approx 1 + nx}$

Condición: $x \ll d \Rightarrow \frac{x}{d} \ll 1$

$$(1 + 2\times10^{-3})^2 \approx 1 + 2\times2\times10^{-3}$$
$$\approx 1.004$$

$$\frac{1}{(d-x)^2} = (d-x)^{-2} = \left[d\left(1-\frac{x}{d}\right)\right]^{-2}$$

$$= d^{-2}\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-2}$$

$$= d^{-2}\left\{1 - 2\left(-\frac{x}{d}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{(d-x)^2} \approx d^{-2}\left\{1 + 2\frac{x}{d}\right\}$$

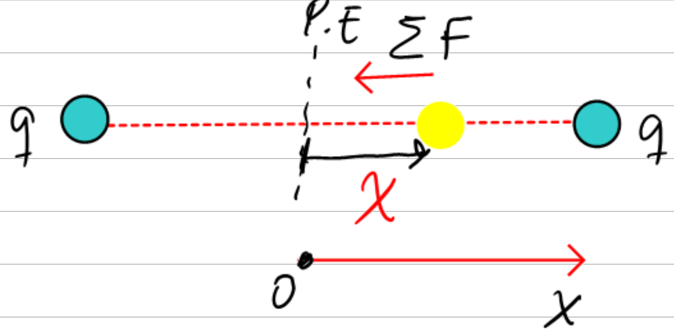
$$\frac{1}{(d+x)^2} = (d+x)^{-2} = \left[d\left(1+\frac{x}{d}\right)\right]^{-2}$$

$$= d^{-2}\left(1+\frac{x}{d}\right)^{-2}$$

$$\frac{1}{(x+d)^2} \approx d^{-2}\left(1 - 2\frac{x}{d}\right)$$

$$\sum F = kq^2\left\{d^{-2}\left(1+\frac{2x}{d}\right) - d^{-2}\left(1-\frac{2x}{d}\right)\right\}$$

$$\sum F = kq^2 d^{-2}\left\{\frac{4x}{d}\right\} = \boxed{\frac{4kq^2}{d^3}\,x}$$

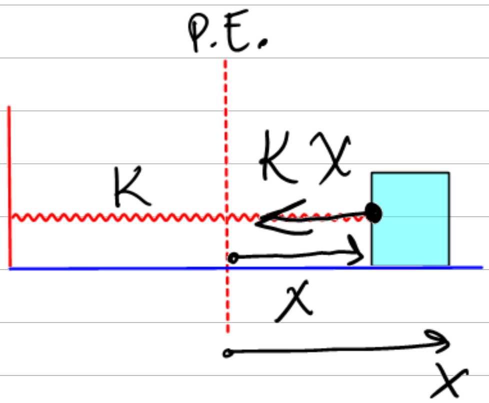


$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

$$-\frac{4kq^2}{d^3}x = ma$$

$$\boxed{a = -\underbrace{\frac{4kq^2}{md^3}}_{\text{cte}}\,x}$$

aceleración desplazamiento



$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

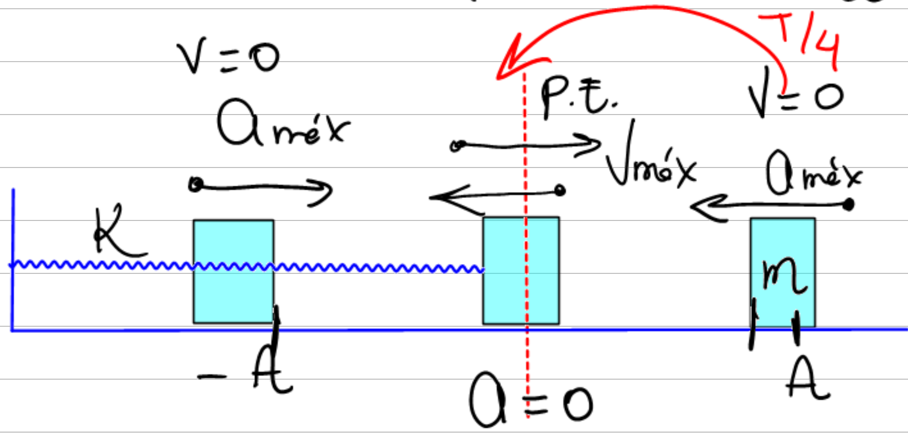
$$-kx = ma$$

$$\boxed{a = -\frac{k}{m}x} \quad \text{M.A.S.}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω: frecuencia angular

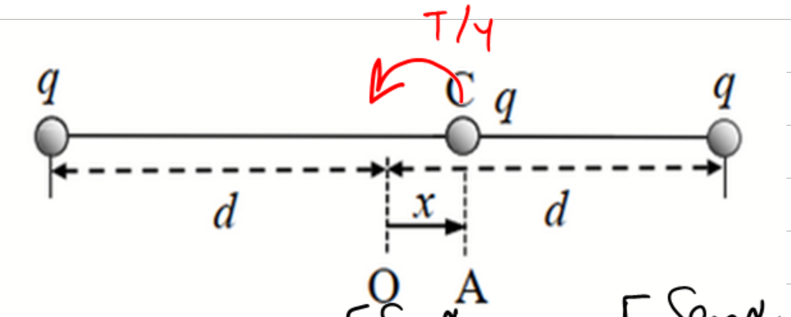
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$



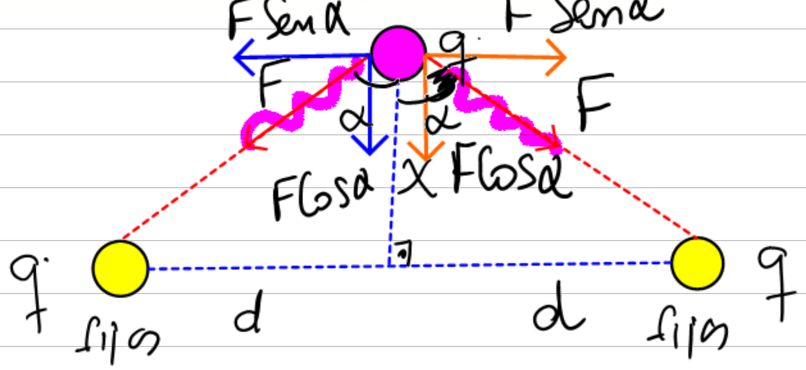
d) Calcula la frecuencia angular de oscilación de la esfera C alrededor de la posición de equilibrio.

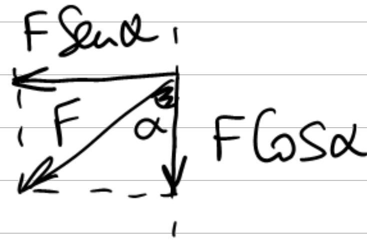
e) ¿Cuánto tiempo tardará la esfera C en ir desde A hasta O.

$$\omega^2 = \frac{4kq^2}{md^3} \Rightarrow \omega = \left(\frac{4kq^2}{md^3}\right)^{1/2} \Rightarrow T = 2\pi\left(\frac{md^3}{4kq^2}\right)^{1/2}$$

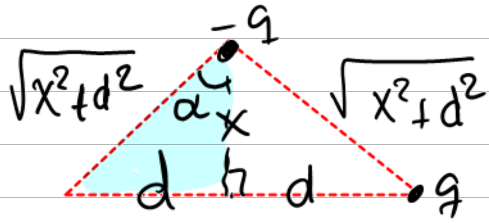


$$\boxed{t = \frac{2\pi}{4}\left(\frac{md^3}{4kq^2}\right)^{1/2}}$$





$$2F\cos\alpha = \Sigma F$$



- $F = \dfrac{kq^2}{(x^2+d^2)}$
- $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$
- $\Sigma F = 2 \cdot \dfrac{kq^2}{(x^2+d^2)} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$

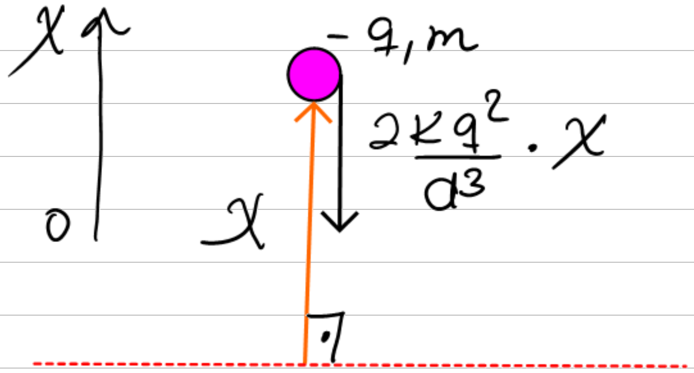
$$\boxed{\Sigma F = \frac{2kq^2 \cdot x}{(x^2+d^2)^{3/2}}}$$

Si $x << d \Rightarrow x^2 + d^2 \approx d^2$

$1 \quad 10^3 \qquad 1^2 + 10^6 \approx 10^6$

$1 \quad 10^5 \qquad 1^2 + 10^{10} \approx 10^{10}$

$$\sum F = \frac{2kq^2}{(d^2)^{3/2}}\,x = \frac{2kq^2}{d^3}\,x$$



$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

$$-\frac{2kq^2}{d^3}\,x = m\,a$$

$$\boxed{a = -\frac{2kq^2}{m d^3}\,x}$$

M.A.S.

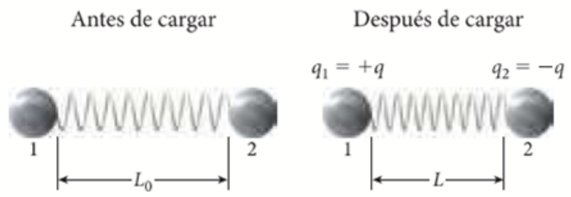
aceleración

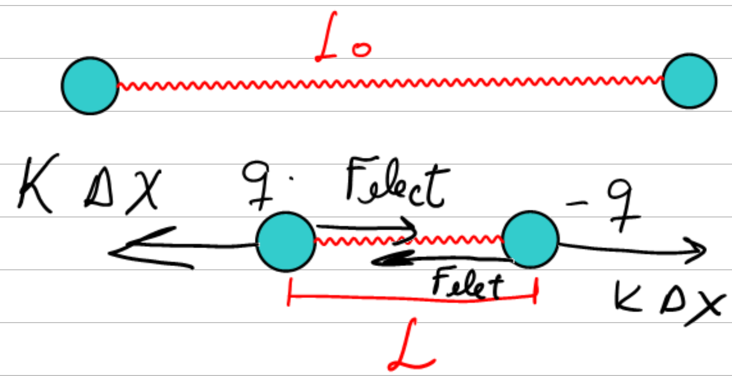
desplazamiento

$$\omega^2 = \frac{2kq^2}{m d^3}$$

$$\boxed{a = -\text{cte}\ x} \quad \text{M.A.S.}$$

•21.41 Dos esferas metálicas idénticas que inicialmente no tienen carga, 1 y 2, están conectadas por un resorte aislante (longitud sin estirar $L_0 = 1.00$ m, la constante del resorte es $k = 25.0$ N/m), como muestra la figura. Luego, las esferas se cargan con $+q$ y $-q$ y el resorte se contrae hasta una longitud $L = 0.635$ m. Recuerde que la fuerza ejercida por un resorte es $F_s = k\Delta x$, donde Δx es el cambio de longitud del resorte a partir de su posición de equilibrio. Determine la carga q. Si el resorte se recubre con metal para hacerlo conductor, ¿cuál es la nueva longitud del resorte?





$$\Delta X = L_0 - L$$

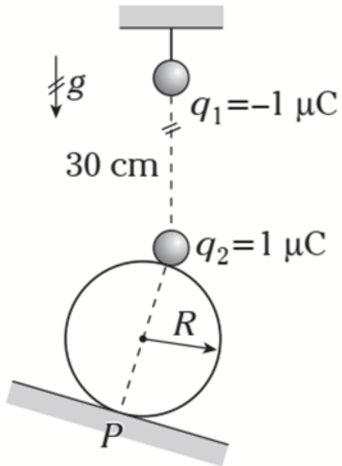
$$K\Delta X = F_{elect}$$

$$K(L_0 - L) = \frac{K_{cou}\, q^2}{L^2}$$

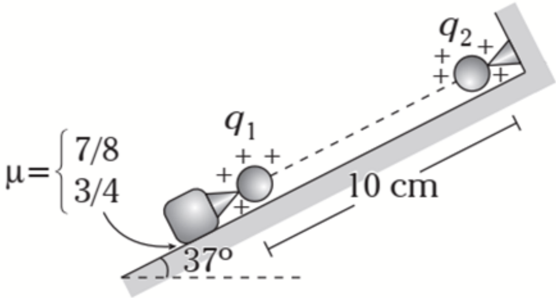
$$q^2 = \frac{K}{K_{coul}}(L_0 - L)L^2$$

$$\boxed{q = \left(\frac{K}{K_{coul}}(L_0 - L)L^2\right)^{1/2}}$$

4. El anillo homogéneo (aislante) se encuentra en equilibrio tal como se muestra. Determine el valor de la fuerza que le ejerce el plano inclinado. (*P* es punto de tangencia)



7. El bloque se encuentra a punto de resbalar. Determine la masa de dicho bloque. (q_1=0,5 μC; q_2=0,2 μC; g=10 m/s^2).



9. Si en la región donde se encuentra la pequeña esfera electrizada con $-4\ \mu C$ se establece un campo eléctrico homogéneo de intensidad $\vec{E}=400\ N/C\ (\hat{j})$. ¿En cuánto varía la lectura del dinamómetro ideal?